



Pruebas selectivas para el ingreso en el cuerpo superior de estadísticos del estado. Orden ECC/1384/2014, de 24 de julio (BOE 30/07/2014).

SEGUNDO EJERCICIO

1.- Estadística

Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de la distribución:

$$f_{\theta}(x) = \theta \exp(-\theta x) \quad x > 0$$

- a) Calcular estimador de máxima verosimilitud para $P(X > t)$.
- b) Supongamos que se miden 10 componentes cuya duración sigue la distribución anterior y que si se suma el tiempo de funcionamiento de todas ellas se contabiliza un total de 1200 horas. A partir de esta muestra, estimar la probabilidad de que una componente vaya a durar menos de 130 horas.
- c) Probar si el estadístico $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ es centrado para θ
- d) Probar si $\sum_{i=1}^n X_i$ es estadístico suficiente y completo. ¿Es $T(X_1, \dots, X_n)$ estimador centrado de uniformemente mínima varianza?

2.- Muestreo

Sea un diseño estratificado con muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento en cada estrato. Se dispone de H estratos de tamaño N_h , $h=1, \dots, H$. El objetivo es estimar la media poblacional \bar{Y} de una cierta característica Y. Sean \bar{X}_h , $h=1, \dots, H$ las medias poblacionales de los estratos de una característica auxiliar X, que suponemos conocidos.

- a) Para estimar la media poblacional \bar{Y} se propone el siguiente estimador:

$$\hat{Y}_D = \hat{Y}_{HT} + \bar{X} - \hat{X}_{HT}$$

donde \bar{X} es la media poblacional de X y \hat{Y}_{HT} , \hat{X}_{HT} son los estimadores de Horvitz-Thompson de las medias de Y y X, respectivamente. Se pide:

- a.1 Demostrar que \hat{Y}_D es un estimador insesgado para \bar{Y}

- a.2 Calcular la varianza de \hat{Y}_D

- a.3 ¿Cuál es la asignación óptima del tamaño muestral en h, n_h , cuando se minimiza la varianza de \hat{Y}_D ?

(Se supone que el coste por unidad muestral no depende del estrato)

- a.4 ¿En qué condiciones \hat{Y}_D sería preferible a \hat{Y}_{HT} ?

- b) Bajo las mismas condiciones anteriores, consideramos ahora el siguiente estimador:

$$\hat{Y}_b = \hat{Y}_{HT} + b(\bar{X} - \hat{X}_{HT})$$

donde b es un número real fijo. ¿Cuál es el valor óptimo para b?

- c) Ahora se supone que no conocemos los valores poblacionales de X ni se dispone de la población estratificada. Entonces, en primer lugar se obtiene una muestra aleatoria simple sin reemplazamiento, S^* , de tamaño n^* entre las N unidades de la población y calculamos el estimador de Horvitz-Thompson \hat{X}^* , de la media poblacional \bar{X} . Después, se obtiene una submuestra aleatoria simple sin reemplazamiento de n unidades a partir de S^* .

Se propone el siguiente estimador:

$$\hat{Y}_c = \hat{Y} + c(\hat{X}^* - \hat{X}) \quad \text{donde}$$

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \hat{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \hat{X}^* = \frac{1}{n^*} \sum_{i=1}^{n^*} x_i$$

Demostrar que:

$$\text{Var}(\hat{Y}_c) = \frac{N - n^*}{Nn^*} S_y^2 + \frac{n^* - n}{nn^*} S_u^2 \quad \text{donde}$$

$$u_i = y_i - cx_i;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N - 1} \quad ; \quad S_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2}{N - 1}$$

3.- Economía

La estimación del Producto Interior Bruto a precios de mercado (PIB) de España para el año 2013 en la nueva base 2010 de la Contabilidad Nacional ha sido de 1.049,2 miles de millones de euros (mm €). Se conocen también los siguientes datos por ramas de actividad relativos al Valor Añadido Bruto a precios básicos (VAB) y a la Remuneración de los Asalariados (RA) para el citado año (mm €):

	VAB	RA
Agricultura, ganadería, silvicultura y pesca	26,6	4,3
Industria	168,6	82,3
Construcción	55,1	27,6
Servicios	708,2	376,1

Para el conjunto de la economía, se tiene además la siguiente información (mm €):

Otros impuestos menos subvenciones sobre la producción	9,6
Gasto en consumo final	814,5
Formación bruta de capital	198,9
Remuneración de los asalariados residentes por empleadores no residentes	2,3
Remuneración de los asalariados no residentes por empleadores residentes	0,2
Impuestos menos subvenciones sobre la producción y las importaciones pagados al resto del mundo	-4,6
Rentas netas de la propiedad pagadas al resto de mundo	13,8

- a)** Se pide hallar los siguientes agregados:
- a.1** Excedente de explotación bruto/Renta mixta bruta de la economía.
 - a.2** Saldo de intercambios exteriores de bienes y servicios.
 - a.3** Renta nacional bruta
- b)** Sabiendo que la estimación del PIB a precios corrientes para el año 2012 fue de 1.055,2 y que la variación interanual en volumen del PIB entre 2012 y 2013 ha sido de $-1,2\%$:
- b.1** Calcular la tasa de variación interanual del deflactor implícito de la economía.
 - b.2** Si se sabe que la variación interanual en volumen de los tres primeros trimestres del año 2013 fue respectivamente de $-2,2\%$, $-1,7\%$ y $-1,0\%$, ¿se podría conocer la variación interanual aproximada para el cuarto trimestre de dicho año?

4.- Econometría

Considere la siguiente expresión de la curva de Phillips a corto plazo aumentada con expectativas:

$$y_t - E_{t-1}(y_t) = \beta(u_t - u_t^*) + e_t \quad (1)$$

donde y_t es la inflación en el periodo t y $E_{t-1}(y_t)$ es el valor esperado en $t-1$ para la inflación en t , u_t es la tasa de paro observada en t , y u^* se refiere a la tasa natural de paro. Haga el supuesto de que la esperanza de inflación en $t-1$ es precisamente la inflación observada en $t-1$, de manera que,

$$y_t - y_{t-1} = b_1 + b_2 u_t + e_t \quad (2)$$

- a) Justifique si el modelo (2) está anidado en (1), o si el modelo (1) está anidado en (2), o si, por el contrario, no son modelos anidados.
- b) Con los datos de una economía europea para el periodo abarcado entre el primer trimestre de 1975 y el último de 1990, se obtiene la siguiente estimación del modelo (2) para los parámetros β_1, β_2 :

<i>Variables</i>	<i>Coefficiente</i>	<i>Desv. típica</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>valor p</i>
Constante	1,4126	2,32829	0,6067	0,54629
“paro”	-0,205876	0,323353	-0,6367	0,52671

Media de la var. dependiente = -0,0432317
 Desviación típica de la var. dependiente. = 3,46601
 Suma de cuadrados de los residuos = 739,902
 Desviación típica de los residuos = 3,48275
 $R^2 = 0,0066016$
 R^2 corregido = -0,00968362
 Grados de libertad = 61
 Estadístico de Durbin-Watson = 2,61265
 Coef. de autocorr. de primer orden. = -0,339296
 Log-verosimilitud = -166,99
 Criterio de información de Akaike = 337,979
 Criterio de información Bayesiano de Schwarz = 342,266
 Criterio de Hannan-Quinn = 339,665

A partir del modelo estimado, estime la tasa natural de paro.

- c) La tasa de paro estimada es una función no lineal de los parámetros estimados. Utilice el método delta para estimar su varianza. Para ello considere la siguiente matriz de covarianzas de los coeficientes

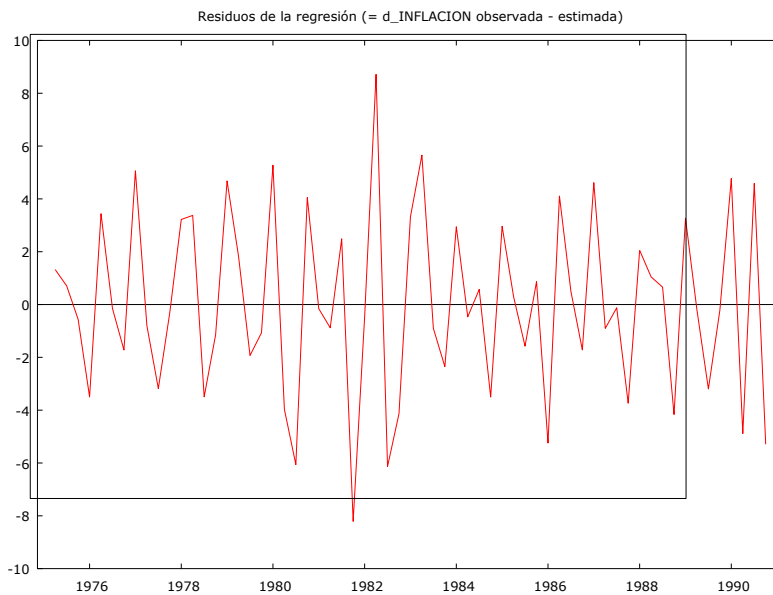
estimados. Posteriormente, construya un intervalo de confianza del 95% para dicha estimación. Utilice el valor crítico de 2.

Matriz de covarianzas de los coeficientes

constante	“paro”	
5,42093	-0,739369	constante
	0,104557	“paro”

d) Un investigador independiente, con datos para las mismas variables y la misma economía, pero para el periodo 1950-2000, obtiene una estimación de la tasa natural de 5.46%. Contraste si la obtenida en este ejemplo es significativamente diferente y, en su caso, trate de explicar la diferencia o semejanza.

e) Los residuos del modelo estimado (modelo (2)) son los siguientes:



Sobre estos residuos se realiza un contraste estadístico de Breusch y Godfrey. El resultado del mismo es

Contraste de Breusch-Godfrey para autocorrelación hasta el orden 4
 estimaciones MCO
 utilizando las 59 observaciones 1976:2-1990:4
 Variable dependiente: ehat

VARIABLE	COEFICIENTE	DES.V.TÍP.	ESTAD T	VALOR P
const	1,52799	1,97027	0,776	0,44148
PARO	-0,206071	0,276687	-0,745	0,45970
ehat_1	-0,695497	0,139759	-4,976	<0,00001 ***
ehat_2	-0,763386	0,165642	-4,609	0,00003 ***
ehat_3	-0,340544	0,163138	-2,087	0,04167 **
ehat_4	-0,119786	0,148330	-0,808	0,42295

R-cuadrado = 0,426673

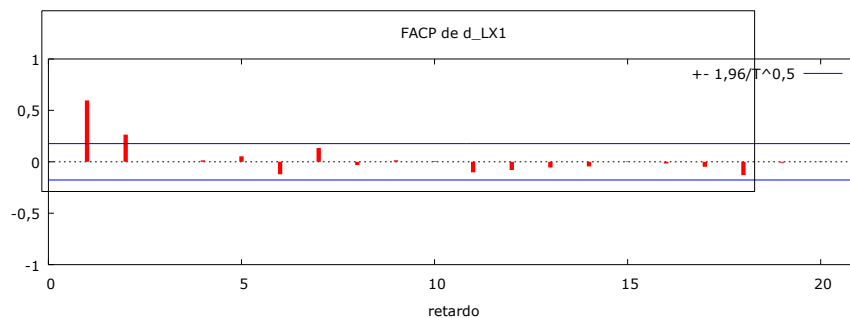
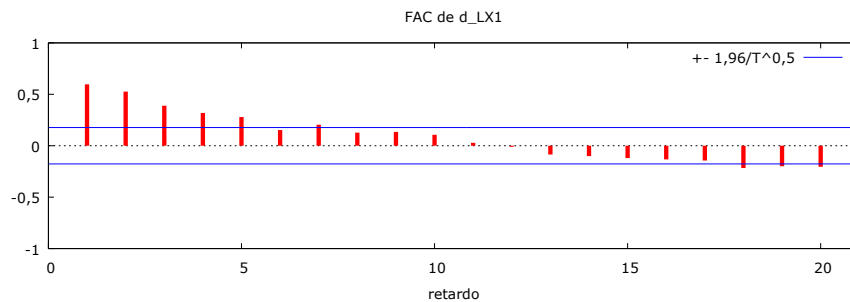
Estadístico de contraste: LMF = 10,249645, con valor p = $P(F(4,53) > 10,2496) = 3,2e-006$

Estadístico alternativo: $TR^2 = 25,173689$, con valor p = $P(\text{Chi-cuadrado}(4) > 25,1737) = 4,64e-005$

Ljung-Box Q' = 20,3203 con valor p = $P(\text{Chi-cuadrado}(4) > 20,3203) = 0,000432$

Explique (i) en qué consiste el contraste (ii) qué conclusión obtiene sobre el modelo, y (iii) conteste justificadamente a la siguiente pregunta: ¿los resultados obtenidos eran esperados a la luz del gráfico de los residuos del modelo?

- f) Considere ahora que es pertinente modelizar los residuos. Para ello realiza un análisis de las funciones de autocorrelación, que proporcionamos a continuación:



Y responda a las siguientes cuestiones: ¿Cómo modelizaría los residuos? ¿Qué modelo plantearía ahora para estimar el modelo (2)?

g) Un colega le proporciona la siguiente estimación del modelo (2)

VARIABLE	COEFICIENTE	DESV.TÍP.	ESTAD T	VALOR P
const	1,34076	0,683277	1,962	0,05462
PARO	-0,191344	0,0955573	-2,002	0,05001

Estimaciones de los coeficientes AR:

e_1	-0,678453	0,136016	-4,988	<0,00001
e_2	-0,740201	0,160427	-4,614	0,00002
e_3	-0,314694	0,157269	-2,001	0,05034
e_4	-0,100201	0,144001	-0,696	0,48946

Suma de los coeficientes AR = -1,83355

Estadísticos basados en los datos rho-diferenciados:

Suma de cuadrados de los residuos = 419,857

Desviación típica de los residuos = 2,71402

R-cuadrado = 0,424775

R-cuadrado corregido = 0,414683

Grados de libertad = 57

Estadístico de Durbin-Watson = 1,85502

Coef. de autocorr. de primer orden. = 0,0245641

Criterio de información de Akaike (AIC) = 287,215

Criterio de información Bayesiano de Schwarz (BIC) = 291,37

Criterio de Hannan-Quinn (HQC) = 288,837

Responda justificadamente a las siguientes cuestiones: ¿Considera que su colega está utilizando la información del correlograma proporcionada en el apartado anterior? ¿Diría que el modelo ha mejorado respecto del primer modelo estimado en el apartado b)? ¿De qué manera se le ocurre mejorar el modelo? ¿Puede decir que se trata de una estimación de mínimos cuadrados generalizados?

5.- Demografía

La oficina estadística de un país facilita el siguiente repertorio de informaciones para un año T todo él referido a la población de mujeres (cifras en miles):

Todos los datos referidos a la población femenina en el año T							
Cantidades en miles	Población a 1 de Enero	Nacimientos por edad de la madre	Defunciones por edad del difunto	Migraciones exteriores		Migraciones interiores	Población a 31 de Diciembre
				Flujo emigración con destino al extranjero	Flujo inmigración con origen en el extranjero	Flujo de migraciones entre provincias	
TOTAL	23.710,2	206,6	190,6	239,2	146,1	232,1	23.633,7
0-4 años	1.172,5	-	0,7	12,0	8,6	11,8	1.123,8
5-9 años	1.184,1	-	0,1	10,5	6,7	10,3	1.200,4
10-14 años	1.080,6	0,1	0,1	9,9	7,5	7,9	1.102,2
15-19 años	1.051,1	4,3	0,1	11,0	11,4	9,3	1.038,5
20-29 años	2.645,4	53,7	0,4	58,7	43,5	56,0	2.538,2
30-39 años	3.795,6	134,4	1,3	64,8	26,7	61,2	3.681,0
40-49 años	3.705,0	14,1	3,7	34,6	16,1	29,5	3.719,6
50-59 años	3.067,9	-	7,6	19,5	11,6	16,8	3.134,2
60-64 años	1.286,7	-	5,2	6,0	5,1	6,3	1.281,0
65 y más años	4.721,3	-	171,4	12,2	8,9	23,0	4.814,8

Se consideran como migraciones interiores todos y cada uno de los cambios de residencia permanente que traspasan la frontera de una provincia y tienen como destino otra provincia del mismo país, sin distinción de orden de la migración u otra tipología cualquiera.

A la vista del anterior enunciado resuelva los siguientes asuntos, formulando y razonando cada uno de los extremos:

- a) Calcule las tasas de migración interior para cada grupo de edades de mujeres.
- b) Calcule las funciones de una tabla de migración interior femenina de acuerdo a los datos del mencionado año T, considerando que en el registro de las migraciones la incidencia de migraciones repetidas realizadas por un mismo individuo durante dicho período se considera empíricamente irrelevante:
 - b.1 Las probabilidades de migrar dentro del país entre provincias diferentes.
 - b.2 Sedentarios de la tabla de migración interprovincial.
 - b.3 Migraciones de la generación ficticia de la tabla.

- c)** De acuerdo a la anterior tabla de migración: ¿cuál es la intensidad del fenómeno demográfico migración interior interprovincial?
- d)** ¿Cuál es la edad media a la migración?, ¿bajo qué hipótesis se calcula?
- e)** Otros comentarios generales a la vista de los flujos demográficos que se presentan.