Estadística Española • Volumen 54, número 178 / 2012, pp. 287-294

Utilización de ejercicios de simulación como herramienta de apoyo para la asimilación de los conceptos de insesgadez y eficiencia relativa de los estimadores(*)

Tomás del Barrio Castro
Departament d'Economía Aplicada
Universitat de les Illes Balears

William Nilsson
Departament d'Economía Aplicada
Universitat de les Illes Balears

Resumen

En este artículo proponemos la utilización de ejercicios de simulación como una herramienta complementaria y muy útil de cara a ayudar a los alumnos que cursan asignaturas de estadística en los estudios de Economía y ADE, para entender conceptos abstractos como insesgadez, eficiencia relativa o consistencia. Mediante un test que pasamos a los alumnos antes y después de realizar la práctica valoramos en qué medida se han alcanzado los objetivos plantados en el diseño del ejercicio de simulación.

Palabras Clave: Experimentos de Monte-Carlo, insesgadez, eficiencia relativa, consistencia y contrastes de proporciones para datos pareados.

Clasificación AMS: 62F10, 62F12

Using Monte-Carlo Experiments as a tool to improve the assimilation of concepts like un-biasness relative efficiency and consistency.

Abstract

In this paper we propose the use of Monte-Carlo experiments as complementary and useful tool that could help the students of subjects like statistics and econometrics to improve their understanding of concepts like un-biasness, relative efficiency and consistency. Using test for paired proportions we find empirical evidence in favour of the utility of the proposed tool.

(*) Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de un evaluador anónimo

Key Words: Monte-Carlo Experiments, un-biasness, relative efficiency, consistency, Tests for paired proportions.

AMS Clasification: 62F10, 62F12

1. Introducción

Existe una creciente preocupación de los profesores de estadística y econometría en los estudios en los cuales dichas asignaturas desarrollan una función instrumental, por la dificultad que representa para los alumnos la correcta asimilación de los conceptos básicos. Y también por la falta de motivación de los alumnos ante las asignaturas de estadística y econometría (ver por ejemplo Steinhorst y Keeler (1995)).

Todo lo anterior ha desembocado en un proceso de reflexión sobre la dificultad intrínseca de las materias tal y como se puede constatar en los artículos aparecidos en The American Statistician, Journal of Statistical Education, Teaching Statistics, Estadística Española... Desde nuestro punto de vista las conclusiones a las que han llegado durante este proceso quedan muy bien resumidas por Peña (1992) y por Watts (1991).

Peña (1992) argumenta que la dificultad asociada a los conceptos básicos de la estadística y la econometría, fundamentalmente los asociados a la teoría de la probabilidad y la inferencia estadística, es un problema real, tal y como se desprende del largo período de maduración que ha necesitado la humanidad para asimilarlos. Todo lo anterior se puede aseverar si tenemos presente que los conocimientos sobre álgebra y cálculo, que no están consideradas como asignaturas sencillas por la mayoría de estudiantes, proceden fundamentalmente de los siglos XVIII y XIX, mientras que la inferencia estadística y la econometría han sido creadas íntegramente en el siglo XX.

En consecuencia resulta importante analizar la dificultad objetiva de la asignatura para poder contrarrestarla de forma satisfactoria y que de esta forma pueda ser mitigada en la medida de lo posible su influencia en el proceso de transmisión de conocimientos y aprendizaje.

Watts (1991) busca las causas de la dificultad del aprendizaje de la estadística y llega a la conclusión de que la principal dificultad de la estadística con respecto a otras materias que pueden ser consideradas difíciles tales como las matemáticas se encuentra en que los conceptos fundamentales que se utilizan en la estadística son primordialmente abstractos.

Por ejemplo los conceptos básicos de un curso introductorio de cálculo son el límite, la derivada y la integral todos ellos pueden ser demostrados y lo que es más importante los dos últimos pueden ser analizados gráficamente como la pendiente o tangente de una curva en un punto y como el área situada debajo de una curva respectivamente. Mientras que por lo que respecta a los conceptos de probabilidad, variable aleatoria, varianza..., no es posible demostrarlos ni tan siquiera representarlos gráficamente, en el mejor de los casos los podemos intentar ilustrar a través de la representación gráfica de funciones de densidad, pero no podemos representar gráficamente el concepto de probabilidad o variable aleatoria tal y como se hace para el de derivada. Es decir, los conceptos básicos que resulta necesario manejar con cierta fluidez en estadística y econometría son en realidad totalmente abstractos.

En este articulo pretendemos mostrar que una herramienta muy útil para salvar los anteriores problemas, son los ejercicios de simulación y Monte-Carlo, dado que en dichos ejercicios el alumno puede diferenciar claramente un parámetro de su estimador, que significa que un estimador sea sesgado o insesgado o más eficiente que otro…

En este artículo nos centraremos en un ejercicio de simulación diseñado para que los alumnos puedan acabar de asimilar el significado de las propiedades de los estimadores. En concreto este ejercicio se centra la sesgadez/insesgadez, la eficiencia relativa y la consistencia.

El artículo está organizado de la siguiente manera, en la siguiente sección mostramos el diseño del ejercicio de simulación y los objetivos que se pretenden alcanzar con él, a continuación en la tercera sección intentamos cuantificar en qué medida la práctica basada en el ejercicio de simulación ha permitido alcanzar los objetivos a partir de información obtenida con un test que se les pasa a los alumnos antes y después de la practica. Finalmente la última sección presenta las conclusiones del trabajo.

2. Diseño del ejercicio de simulación

La herramienta utilizada son los ejercicios de simulación o técnicas de Monte-Carlo, que nos permiten para una ley de probabilidad (o función de densidad) dada (a determinar por la persona que lleva a término el ejercicio) obtener tantas muestras de tamaño muestral n como se quiera. Cada vez que se obtiene una muestra decimos que hemos obtenido una réplica. Por lo tanto, el número total de muestras obtenidas es el número de replicas. En Brooks (2003) y Santos (2005) se pueden encontrar aplicaciones similares a la descrita en esta sección.

En este caso el número de replicas utilizadas es de 100 y los tamaños muestrales son de 20, 40 y 60 observaciones. La ley de probabilidad que determina el comportamiento de la población es una ley Normal con media poblacional $\mu = 5$ i varianza poblacional $\sigma^2 = 1$, $N(5,1)$.

El objetivo principal consiste en que los alumnos acaben de entender que significa que un estimador sea insesgado o más eficiente que otro o consistente. También comprobar que con los ejercicios de simulación se pueden obtener conclusiones equivalentes a las obtenidas calculando el valor esperado y la varianza de un estimador.

En particular utilizamos las técnicas de Monte-Carlo para analizar el comportamiento de los siguientes estimadores alternativos de la medida poblacional μ en una población $N(5,1)$:

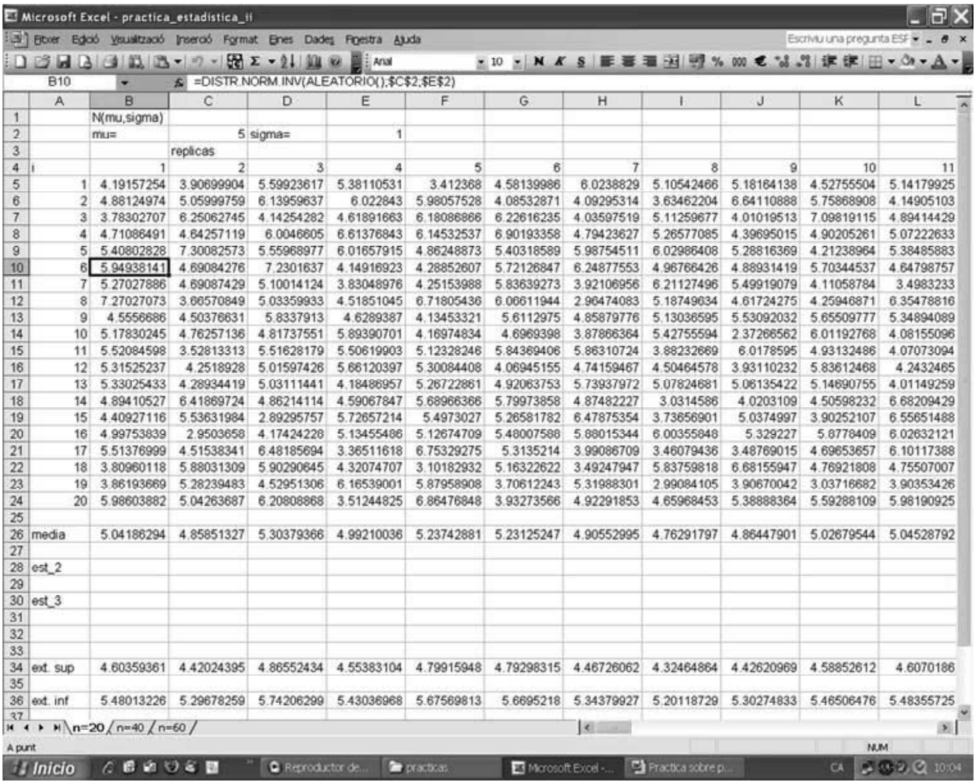
$$\hat{\mu}_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

El ejercicio de simulación se realiza utilizado la hoja de cálculo Excel que permite obtener números psuedo-aleatorios comprendidos entre 0 y 1 con la función **=ALEATORIO()** y también permite obtener el valor a de una variable aleatoria $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ que con una determinada probabilidad p cumple $P(x \leq a) = p$, mediante la función **=DISTR.NORM.INV(probabidad (p), media(μ), desviación standard (σ))**. Por tanto, utilizando la siguiente función **=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO(), 5, 1)** se pueden obtener realizaciones de una variable aleatoria $N(5,1)$.

En el siguiente cuadro mostramos como quedaría la hoja de cálculo para el caso de n=20:



Microsoft Excel - practica_estadistica_ii

B10 =DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();C2;E2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		N(mu,sigma)										
2		mu=	5	sigma=	1							
3			replicas									
4	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	1	4.19157254	3.90699904	5.59923617	5.38110531	3.412368	4.58139986	6.0238829	5.10542466	5.18164138	4.52755504	5.14179925
6	2	4.88124974	5.05999759	6.13959637	6.022843	5.98057528	4.08532871	4.09295314	3.63462204	6.64110888	5.75868908	4.14905103
7	3	3.78302707	6.25062745	4.14254282	4.61891663	6.18086866	6.22616235	4.03597519	5.11259677	4.01019513	7.09819115	4.89414429
8	4	4.71086491	4.64257119	6.0046605	6.61376843	6.14532537	6.90193358	4.79423627	5.26577085	4.39695015	4.90205261	5.07222633
9	5	5.40802828	7.30082573	5.55968977	6.01657915	4.86248873	5.40318589	5.98754511	6.02986408	5.28816369	4.21238964	5.38485883
10	6	5.94938141	4.69084276	7.2301637	4.14916923	4.28852607	5.72126847	6.24877553	4.96766426	4.88931419	5.70344537	4.64798757
11	7	5.27027886	4.69087429	5.10014124	3.83048976	4.25153988	5.83639273	3.92106956	6.21127496	5.49919079	4.11058784	3.4983233
12	8	7.27027073	3.66570849	5.03359933	4.51851045	6.71805436	6.06611944	2.96474083	5.18749634	4.61724275	4.25946871	6.35478816
13	9	4.5556686	4.50376631	5.8337913	4.6289387	4.13453321	5.6112975	4.85879776	5.13036595	5.53092032	5.65509777	5.34894089
14	10	5.17830245	4.76257136	4.81737551	5.89390701	4.16974834	4.6969398	3.87866364	5.42755594	2.37266562	6.01192768	4.08155096
15	11	5.52084598	3.52813313	5.51628179	5.50619903	5.12328246	5.84369406	5.86310724	3.88232669	6.0178595	4.93132486	4.07073094
16	12	5.31525237	4.2518928	5.01597426	5.66120397	5.30084408	4.06945155	4.74159467	4.50464578	3.93110232	5.83612468	4.2432465
17	13	5.33025433	4.28934419	5.03111441	4.18486957	5.26722861	4.92063753	5.73937972	5.07824681	5.06135422	5.14690755	4.01149259
18	14	4.89410527	6.41869724	4.86214114	4.59067847	5.68966366	5.79973858	4.87482227	3.0314586	4.0203109	4.50598232	6.68209429
19	15	4.40927116	5.53631984	2.89295757	5.72657214	5.4973027	5.26581782	6.47875354	3.73656901	5.0374997	3.90252107	6.55651488
20	16	4.99753839	2.9503658	4.17424228	5.13455486	5.12674709	5.48007588	5.88015344	6.00355848	5.329227	5.8778409	6.02632121
21	17	5.51376999	4.51538341	6.48185694	3.36511618	6.75329275	5.3135214	3.99086709	3.46079436	3.48769015	4.69653657	6.10117388
22	18	3.80960118	5.88031309	5.90290645	4.32074707	3.10182932	5.16322622	3.49247947	5.83759818	6.68155947	4.76921808	4.75507007
23	19	3.86193669	5.28239483	4.52951306	6.16539001	5.87958908	3.70612243	5.31988301	2.99084105	3.90670042	3.03716682	3.90353426
24	20	5.98603882	5.04263687	6.20808868	3.51244825	6.86476848	3.93273566	4.92291853	4.65968453	5.38888364	5.59288109	5.98190925
25												
26	media	5.04186294	4.85851327	5.30379366	4.99210036	5.23742881	5.23125247	4.90552995	4.76291797	4.86447901	5.02679544	5.04528792
27												
28	est_2											
29												
30	est_3											
31												
32												
33												
34	ext. sup	4.60359361	4.42024395	4.86552434	4.55383104	4.79915948	4.79298315	4.46726062	4.32464864	4.42620969	4.58852612	4.6070186
35												
36	ext. inf	5.48013226	5.29678259	5.74206299	5.43036968	5.67569813	5.6695218	5.34379927	5.20118729	5.30274833	5.46506476	5.48355725

n=20 / n=40 / n=60

Cada alumno calcula para cada muestra el valor de los tres estimadores propuestos. Por ejemplo el caso de la media muestral $\hat{\mu}_1 = \bar{x}$, que sabemos que es un estimador insesgado de los media poblacional, comprueba que esto no quiere decir que cada vez que se utilicé éste obtendremos un valor igual a la verdadera media poblacional, sino que el valor esperado del estimador coincide con el verdadero valor del parámetro poblacional de interés. En términos del ejercicio de simulación que estamos llevando a cabo, el hecho de que $\hat{\mu}_1$ sea un estimador insesgado no quiere decir que el valor que alcanzará para cada replica sea igual a $\mu = 5$, sino que si se calcula muchas veces este estimador la media de todos los valores calculados se encontrara muy cercana al verdadero valor poblacional.

El hecho de que el valor adoptado por la media muestral para cada muestra o réplica se encuentre más o menos lejos del valor esperado es una cuestión que dependerá de la precisión del estimador. La forma que utilizaremos para medir la precisión es la varianza muestral de las 100 medias muestrales.

Sabemos que para los estimadores propuestos se cumple:

$$E[\hat{\mu}_1] = \mu \quad VAR[\hat{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{n} \quad ECM[\hat{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E[\hat{\mu}_2] = \mu \quad VAR[\hat{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{n-1} \quad ECM[\hat{\mu}_1] = \frac{\sigma^2}{n-1}$$

$$E[\hat{\mu}_2] = \frac{n}{n+1}\mu \quad VAR[\hat{\mu}_1] = \frac{n\sigma^2}{(n+1)^2} \quad ECM[\hat{\mu}_1] = \frac{n\sigma^2}{(n+1)^2} + \frac{\mu^2}{(n+1)^2}$$

Por tanto, los estimadores $\hat{\mu}_1$ i $\hat{\mu}_2$ son insegados. Si tenemos que elegir entre estos dos estimadores, escogeríamos $\hat{\mu}_1$ dado que su varianza es más pequeña y por tanto más preciso. Por lo que respecta a $\hat{\mu}_3$, es un estimador sesgado pero tiene una varianza más pequeña que la de $\hat{\mu}_1$ i $\hat{\mu}_2$. Entonces, nos encontramos en una situación de estimadores con propiedades contrapuestas. Por lo que para elegir entre ellos hemos de utilizar el error cuadrático medio (ECM).

Los alumnos comprobaran que al calcular las medias, varianzas y los ECM a partir de las 100 replicas, los resultados obtenidos son muy parecidos a los teóricos. Es decir, que la media asociada a $\hat{\mu}_1$ i $\hat{\mu}_2$ está muy cenca de 5, la de $\hat{\mu}_3$ se encuentra por debajo de 5 y que la varianza de $\hat{\mu}_3$ es menor que la de $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ Y así confirmaran que nos encontramos en una situación de estimadores con propiedades contrapuestas.

Como el ECM depende de los valores que adopten μ, σ^2 y n, los alumnos calcularan su valor para distintas combinaciones como las que se recogen en el siguiente cuadro:

Cuadro 1

	$n = 20$ $\mu = 5$ $\sigma = 1$	$n = 20$ $\mu = 1$ $\sigma = 1$	$n = 20$ $\mu = 5$ $\sigma = 5$
$\mathrm{EMC}[\hat{\mu}_1]$	0.050	0.050	1.25
$\mathrm{EMC}[\hat{\mu}_2]$	0.053	0.053	1.32
$\mathrm{EMC}[\hat{\mu}_3]$	0.102	0.048	1.19

ESTADÍSTICA ESPAÑOLA Vol. 54. Núm 178 / 2012

Los alumnos compararán los valores teóricos del ECM recogidos en el cuadro 1 con los calculados a partir de las 100 replicas realizas y comprobarán que los resultados se encuentran muy próximos.

Cada vez que los alumnos pulsen la tecla F9 la hoja de cálculo se recalculará y los alumnos podrán comprobar que los resultados se mantienen.

Finalmente el ejercicio se repetirá para los tamaños muestrales de n=40 y n=60, y los alumnos apreciarán que las medias de las réplicas adoptarán valores parecidos a los alcanzados con n=20 para $\hat{\mu}_1$ y $\hat{\mu}_2$ al ser estos estimadores insesgados. Y como el valor de la media asociada a $\hat{\mu}_3$ se irá acercando al valor poblacional a medida que el tamaño muestral se incremente, dado que $\hat{\mu}_3$ es asintóticamente insesgado. Finalmente los alumnos también podrán apreciar que a medida que se incrementa el tamaño muestral la varianza y el ECM calculados a partir de las 100 replicas disminuyen y se van acercando a cero, dado que todos los estimadores analizados son consistentes.

3. Evaluación de los resultados obtenidos

Para tratar de valorar la utilidad del ejercicio de simulación descrito en el apartado anterior se ha pasado a los alumnos de las licenciatura de ADE (LADE) y Economía (LE) un cuestionario antes y después de realizar la práctica. En dicho test se plantean preguntas cerradas con cuatro posibles respuestas relacionadas con los tópicos de interés, es decir, insesgadez, eficiencia y consistencia. Las preguntas utilizadas son las siguientes:

1. Se dice que un estimador es insesgado si:
    a) Es un estimador que no comete errores.
    b) Es un estimador que comete errores muy pequeños.
    c) Es un estimador que no comete errores sistemáticos.
    d) Es un estimador que es muy fiable.
2. Un estimador es más eficiente que otro:
    a) Si sus errores más pequeños.
    b) Si es más fiable.
    c) Si es más preciso.
    d) Si siempre acierta.
3. Un estimador es consistente:
    a) Si es insesgado y eficiente.
    b) Si es un estimador óptimo.
    c) Si a medida que el tamaño muestral crece el sesgo es más pequeño.

ESTADÍSTICA ESPAÑOLA Vol. 54 Núm 178 / 2012

d) Si a medida que el tamaño muestral crece disminuye su sesgo y varianza.

Tal y como se puede apreciar en cada una de las preguntas sólo hay una respuesta correcta. En la primera pregunta las respuestas incorrectas (a, b y d) responden a la idea errónea que suelen tener los alumnos sobre que es un estimador insesgado y la misma situación se da en las alternativas incorrectas de las preguntas dos y tres (a, b y c) y (a, b y c) respectivamente.

El anterior cuestionario se ha pasado a un total de 65 alumnos de LADE y LE. Para comprobar si existen diferencias significativas en los resultados obtenidos por los alumnos antes y después de realizar la prácticas hemos utilizado, los contrastes de comparación de proporciones para datos emparejados de NcNemar (1947) y Liddell (1983) (ver Liddell (1983) y Armitage, Berry y Matthews (2002) para más detalles).

		Después	
		Correcta	Incorrecta
Antes	Correcta	n_{11}	n_{10}
	Incorrecta	n_{01}	n_{00}

NcNemar propuso un contraste que sigue una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad que nos permite contrastar la hipótesis nula de que el valor esperado de la diferencia $n_{01} - n_{10}$ es cero. Liddell propuso un estimador puntual y por intervalo del riesgo relativo $R = n_{01}/n_{10}$ y un estadístico de prueba para contrastar la hipótesis nula de que *R=1*. En ambos caso se explota la información de los alumnos que cambian de opinión o casos discordantes para ver si el ejercicio de simulación puede tener un efecto positivo en la asimilación de los conceptos.

Cuadro 2

Pregunta	n_{11}	n_{00}	n_{01}	n_{10}	McNemar	R	R_L	R_U	$F_{R=1}$
1	17	11	34	3	24,324***	11,333	4,091	43,515	8,500***
2	35	8	19	3	10,227***	6,333	2,165	25,162	4,750***
3	39	12	12	2	5,786**	6,000	1,595	37,463	4,000***

Donde ***, *** y * significa estadísticamente significativo al 1%, 5% y 10% respectivamente.

Los resultados se encuentran recogidos en el cuadro 2. Tal y como se puede apreciar tanto con el contraste de McNemar como con el de Liddell rechazamos la hipótesis nula. Además claramente la estimación por intervalo de R excluye 1, por lo que podemos afirmar que el valor esperado de la diferencia $n_{01} - n_{10}$ es positivo o que el valor esperado del ratio n_{01}/n_{10} es mayor que uno. A partir de los anteriores resultados podemos afirmar que encontramos evidencia a favor de que los ejercicios de simulación han permitido mejorar la correcta asimilación de los conceptos de insesgadez, eficiecia relativa y consistencia.

4. Conclusiones

En el presente trabajo se proponen los ejercicios de simulaciones como una herramienta para permitir afianzar los conceptos asociados a las propiedades de los estimadores (insesgadez, eficiencia relativa y consistencia). En concreto proponemos un diseño sencillo que es fácilmente implementable en una hoja de cálculo tipo Excel. Utilizando datos de un test pasado a los alumnos antes y después de la práctica hemos obtenido evidencia empírica, utilizando contrastes para datos emparejados, de que la herramienta permite mejorar la asimilación de los conceptos de insesgadez, eficiencia relativa y consistencia.

Finalmente es preciso tener presente que este tipo de ejercicios pueden ser también de gran utilidad para otros tópicos, como la estimación por intervalo, el contraste de hipótesis, muticolinealidad, errores de especificación en el modelo de regresión (omisión de variable relevante, error en la forma funcional), errores de medida, variables instrumentales…

Referencias

ARMITAGE, P., G. BERRY AND J.N.S. MATTHEWS (2002), «Statistical Methods in Medical Research», *Blackwell Science*.

BROOKS G.P. (2003), «Using Monte-Carlo Methods to Teach Statistics: The MC2G Computer Program», *Undestanding Statistics*, 2, 137-150.

LIDDELL F.D.K. (1983), «Simplified Exact Analysis of cas-referent matched pairs; Dichotomus Exposure Studies», *Journal of Epidemiology and Community Health*, 37, 82-84.

MCNEMAR, Q. (1947), «Note on the sampling error of the difference between correlated proportions or percentages», *Psychometrika*, 12, 153–157.

PEÑA, D. (1992), «Reflexiones sobre la enseñanza experimental de la Estadística», *Estadística Española,* 34, 469-490.

SANTOS F.F. (2005), «Using Monte-Carlo Simulations and Interactive White-Board for Teaching Sampling Distribution Characteristics», *Paper Presented at the U.S. Conference on Theaching Statistics.*

SATTERTHWAITE, F. E. (1946), «An approximate distribution of estimates of variance components», *Biometrics Bulletin*, 2, 110-114.

STEINHORST R.K. Y C.M. KEELER (1995), «Developing Material for Introductory Statistics Courses from a Conceptual, Active Learning Viewpoint», *Journal of Statistics Education*, 3, 1-11.

WATSS D.G. (1991), «Why is Introductory Statistics dificult to learn? And what can we do to make it easier?», *The American Statistician*, 45, 290-291.